UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y DE ENERGÍA

DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE INGENIERÍA MECÁNICA

COMPLEMENTO DE MATEMÁTICA

VECTORES, RECTAS Y PLANOS EN R^3

ROGELIO EFREN CERNA REYES

Resolucion Nº 058-2016-D-FIME

SEMESTRE 2016-B
CALLAO-PERU

PREFACIO

En los espacios vectoriales reales 3-dimensionales o el espacio o simplement R^3 se tienen los vectores, las recta y los planos entre otros .

En estas dos ultimas decadas el enfoque vectorial es el preferido por los estudiantes de ingeniería, por una razón simple, los temas de los cursos de ingenieria requieren de una interpretación conceptual y gráfica en la forma vectorial.

Lo cual, es motivo mas que suficiente, para presentar los vectores, las rectas y los planos en el espacio tridimensional de manera grafica y conceptual como tema a desarrollar en el curso de Complemento de Matemática en Ingenieria.

A continuacion bao el enfoque vectorial se desarrollan las definiciones, propiedades, y algunas aplicaciones de los vectores, rectas y el plano en R^3

Este sexto trabajo queda ha vuestra disposición, especialmente de los estudiantes de Ingeniería Mecánica y de Energía de la Universidad Nacional del Callao.

El autor.

INDICE

VECTORES, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO R^3

1. VECTORES EN EL ESPACIO R3

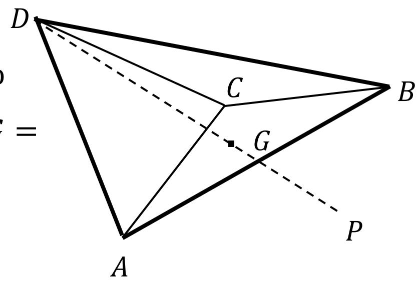
Los vectores en el espacio vectorial R^3, son aquellos vectores de R^n con $n = 3$. Las definiciones y propiedades de vectores son las mismas, sólo que los vectores ahora presentan tres componentes. Se hace notar, que la construcción de un vector ortogonal a partir de un vector dado, en R^3 no es posible.

Antes de continuar con algunas definiciones y propiedades propias de R^3, veamos algunos ejercicios con vectores en R^3.

Ejercicio 1. Los puntos $A(1,1,1)$, $B(5,7,9)$, $C(6,7,8)$ y $D(7,5,9)$ determinan un tetraedro. Si desde los vértices A y D parten simultáneamente dos móviles con dirección al baricentro de la cara ABC, cada uno con una velocidad de $\sqrt{2}$ unidades por segundo. Cuál es el punto en el que se encuentra el móvil que partió de D, cuando el móvil que partió de A llega al baricentro.

Solucion 1.

Se desea hallar el punto P en el que se encuentra el móvil que partió del vértice D, en la figura, cuando el móvil que parte del vértice A llega al baricentro $G = \frac{1}{3}(A + B + C)$



Es decir;

$G = \frac{1}{3}\big((1,1,1) + (5,7,9) + (6,7,8)\big) \rightsquigarrow G = (4,5,6)$ Hallemos el tiempo en el que el móvil que parte de A llega a G

$$t = \frac{Distancia\ de\ A\ a\ G}{velocidad} = \frac{\|\overline{AG}\|}{\sqrt{2}}$$

Donde; $\overline{AG} = G - A = (4,5,6) - (1,1,1) = (3,4,5)$, $\|\overline{AG}\| = 5\sqrt{2}$

Luego $t = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5$ segundos, tiempo en el cual el móvil que parte de A llega a G.

Ahora, el móvil que parte de D en 5 segundos se encuentra en el punto P.

Esto es;

$$P = D + \|\overline{DP}\|\bar{u}$$

Donde;

$$\|\overline{DP}\| = (velocidad)(tiempo) = 5\sqrt{2}$$

$\bar{u}\ //\ \overline{DP}\ //\ \overline{DG} = G - D = (4,5,6) - (7,5,9) = (-3,0,-3)$, $\|\overline{DG}\| = 3\sqrt{2}$

Entonces

$$\bar{u} = \frac{\overline{DG}}{\|\overline{DG}\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3,0,3)$$

Por lo que;

$$P = (7,5,9) + 5\sqrt{2}\frac{1}{3\sqrt{2}}(-3,0,3) = (2,5,4)$$

Finalmente, el móvil que partió del vértice D, cuando el que partió del vértice A llega al baricentro G, se encuentra en el punto $P(2,5,4)$.

Ejercicio 2. Sean los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en R^3 con $\|\bar{a}\| = 4$ y $\|b\| = 3$. El ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es $\frac{\pi}{3}$. Halle:

a) $Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b})$

b) El área del paralelogramo formado por los vectores $2\bar{a} - 3\bar{b}$ y $3\bar{a} + 2\bar{b}$.

c) $Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b})$

Solucion 2.

a) Recordamos la definición de la componente de un vector en la dirección de otro vector no nulo. Es decir;

$$Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b}) = \frac{(2\bar{a} - 3\bar{b})\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{2\bar{a}\cdot\bar{a} - 3\bar{b}\cdot\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$$

También recordamos; $\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\theta$, entonces

$$Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b}) = \frac{2\|\bar{a}\|^2 - 3\left(\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\|\bar{a}\|} = \frac{2(4)^2 - 3\left(4(3)\frac{1}{2}\right)}{4}$$

$$Comp_{\bar{a}}(2\bar{a} - 3\bar{b}) = \frac{7}{2}$$

b) Recordamos que el área de un paralelogramo formado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ esta dado por:

$$A = \sqrt{\|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2}$$

Ahora el área del paralelogramo formado por los vectores $2\bar{a} - 3\bar{b}$ y $3\bar{a} + 2\bar{b}$ es;

$$A = \sqrt{\|2\bar{a} - 3\bar{b}\|^2\|3\bar{a} + 2\bar{b}\|^2 - \left((2\bar{a} - 3\bar{b})\cdot(3\bar{a} + 2\bar{b})\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\left(4\|\bar{a}\|^2 - 12\bar{a}\cdot\bar{b} + 9\|\bar{b}\|^2\right)\left(9\|\bar{a}\|^2 + 12\bar{a}\cdot\bar{b} + 4\|\bar{b}\|^2\right) - \left(6\|\bar{a}\|^2 - 5\bar{a}\cdot\bar{b} - 6\|\bar{b}\|^2\right)^2}$$

$$A = \sqrt{\left(4(4)^2 - 12(4)(3)\frac{1}{2} + 9(3)^2\right)\left(9(4)^2 + 12(4)(3)\frac{1}{2} + 4(3)^2\right) - \left(6(4)^2 - 5(4)(3)\frac{1}{2} - 6(3)^2\right)^2}$$

$$A = \sqrt{18252}$$

c) $Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b}) = \frac{(3\bar{a}-2\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})}{\|\bar{a}+\bar{b}\|} = \frac{3\bar{a}\cdot\bar{a}-2\bar{a}\cdot\bar{b}+3\bar{a}\cdot\bar{b}-2\bar{b}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}+\bar{b}\|}$

$$Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b}) = \frac{3\|\bar{a}\|^2 + \bar{a}\cdot\bar{b} - 2\|\bar{b}\|^2}{\|\bar{a}+\bar{b}\|} = \frac{3\|\bar{a}\|^2 + \|\bar{a}\|\|\bar{a}\|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\|\bar{b}\|^2}{\|\bar{a}+\bar{b}\|}$$

Donde:

$$\|\bar{a}+\bar{b}\|^2 = (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) = \|\bar{a}\|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + \|\bar{b}\|^2$$

$$= \|\bar{a}\|^2 + 2\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \|\bar{b}\|^2$$

$$= 4^2 + 2(4)(3)\frac{1}{2} + 3^2$$

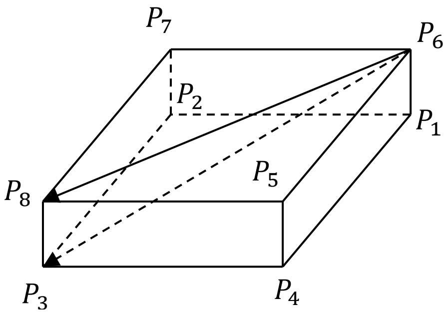
$$\|\bar{a}+\bar{b}\|^2 = 37 \;\leadsto\; \|\bar{a}+\bar{b}\| = \sqrt{37}$$

Entonces

$$Comp_{\bar{a}+\bar{b}}(3\bar{a} - 2\bar{b}) = \frac{3(16) + 4(3)\left(\frac{1}{2}\right) - 2(9)}{\sqrt{37}} = \frac{36}{\sqrt{37}}$$

Ejercicio 3. Los puntos $P_3(13,8,5)$ y $P_4(5,8,13)$ son extremos de una arista de una de las bases de un paralelepípedo rectangular, siendo $P_6(-5,-20,3)$ y P_8 los extremos de una diagonal en la base opuesta. Si $\overline{P_3P_8}$ es una arista lateral y $\overline{P_6P_8} = r(6,3,2), r \in R$. Cuáles son los otros cinco vértices.

Solucion 3.



De la figura se tiene que:

$$\overline{P_3P_4} = (-8,0,8) = \overline{P_7P_6}$$

De donde

$P_7 = P_6 - (-8,0,8) = (-5,-20,3) - (-8,0,8)$

Luego el vértice es:

$$\boldsymbol{P_7(3,-20,-5)}$$

Además, en la figura se aprecia que;

$$Proy_{\overline{P_6P_8}}\overline{P_6P_3} = \overline{P_6P_8}$$

Donde;

$$\overline{P_6P_8} = r(6,3,2)\,, r \in R \text{ y } \overline{P_6P_3} = (18,28,2)$$

Luego,

$$Proy_{\overline{P_6P_8}}\overline{P_6P_3} = Proy_{(6,3,2)}(18,28,2) = \frac{(18,28,2)\cdot(6,3,2)}{\|(6,3,2)\|}(6,3,2) = r(6,3,2) \leadsto r = 4$$

Entonces

$$\overline{P_6P_8} = 4(6,3,2) \;\leadsto\; P_8 = P_6 + (24,12,8) = (-5,-20,3) + (24,12,8)$$

Obteniéndose el otro vértice

$$\boldsymbol{P_8(19,-8,11)}$$

Se observa que;

$P_5 = P_4 + \overline{P_4P_5} = P_4 + \overline{P_3P_8}\,, \qquad \overline{P_3P_8} = (19,-8,11) - (13,8,5) = (6,-16,6)$

$P_5 = (5,8,13) + (6,-16,6) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_5(11,-8,19)}$

$P_1 = P_6 + \overline{P_6P_1} = P_6 + \overline{P_8P_3}\,, \qquad \overline{P_8P_3} = (13,8,5) - (19,-8,11) = (-6,16,-6)$

$P_1 = (-5,-20,3) + (-6,16,-6) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_1(-11,-4,-3)}$

$P_2 = P_3 + \overline{P_3P_2} = P_3 + \overline{P_4P_1}\,, \qquad \overline{P_4P_1} = (-11,-4,-3) - (5,8,13) = (-16,-12,-16)$

$P_2 = (13,8,5) + (-16,-12,-16) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_2(-3,-4,-11)}$

Verificando el vértice hallado anteriormente,

$P_7 = P_8 + \overline{P_8P_7} = P_8 + \overline{P_3P_2}\,, \overline{P_3P_2} = (-3,-4,-11) - (13,8,5) = (-16,-12,-16)$

$P_7 = (19,-8,11) + (-16,-12,-16) \rightsquigarrow \boldsymbol{P_7(3,-20,-5)}$

1.1 PARALELISMO Y ORTOGONALIDAD DE VECTORES

Las definiciones y propiedades para el paralelismo y ortogonalidad de vectores en R^3 son análogas a las presentadas para R^n con $n = 3$.

1.2 PRODUCTO ESCALAR

La definición y propiedades son análogas a las presentadas para R^n, sólo que ahora se tiene $n = 3$.

1.3 PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de dos vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ solo en R^3, denotado por $\bar{a}\times\bar{b}$, se define como el vector dado por:

$$\boldsymbol{\bar{a}\times\bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)}$$

$\bar{a}\times\bar{b}$: Se lee "el producto vectorial de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$

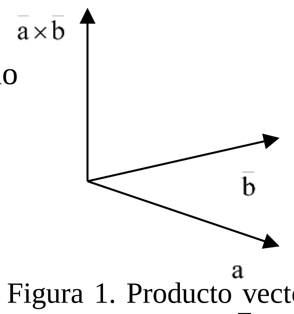


Figura 1. Producto vectorial de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$

OBSERVACIONES.

1. $\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ significa que $\bar{a} \perp (\bar{a}\times\bar{b})$
2. $\bar{b}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ significa que $\bar{b} \perp (\bar{a}\times\bar{b})$

1.3.1 PROPIEDADES

Sean lo vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ en R^3 y cualesquiera escalares $r \in R$, se tiene

1. $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$
2. $(r\bar{a})\times\bar{b} = r(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{a}\times(r\bar{b})$
3. $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c}$
4. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$
5. $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{o}$ para todo vector $\bar{a} \in R^3$
6. $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) \neq (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$
7. $\bar{a}\times\bar{o} = \bar{o}\times\bar{a} = \bar{o}$
8. $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$

Según las propiedades se tiene

$$\bar{\imath}\times\bar{\imath} = \bar{\jmath}\times\bar{\jmath} = \bar{k}\times\bar{k} = \bar{o}$$

$$\bar{\imath}\times\bar{\jmath} = \bar{k}\,, \qquad \bar{\jmath}\times\bar{\imath} = -\bar{k}$$

$$\bar{\jmath}\times\bar{k} = \bar{\imath}\,, \qquad \bar{k}\times\bar{\jmath} = -\bar{\imath}$$

$$\bar{k}\times\bar{\imath} = \bar{\jmath}\,, \qquad \bar{\imath}\times\bar{k} = -\bar{\jmath}$$

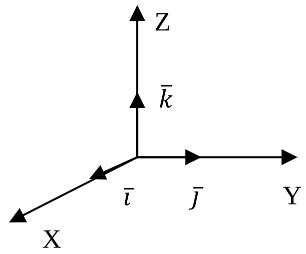


Figura 2. Producto vectorial de los vectores $\bar{\imath}, \bar{\jmath}\ y\ \bar{k}$

Ejercicio 4. Demostrar la identidad de Lagrange

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$$

Solucion 4. **Demostración.**

Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\begin{aligned}\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 &= \|(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\|^2\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\ &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\\ &= \|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$$

O también

$$\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2 = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$$

$$= \bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times(\bar{a}\times\bar{b})\right)\,, \qquad (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

$$= \bar{a}\cdot[(\bar{b}\cdot\bar{b})\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{b}],\ \ \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$$

$$= \|\bar{b}\|^2\bar{a}\cdot\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

$$= \|\bar{b}\|^2\|\bar{a}\|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2$$

Finalmente,

$$\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|^2 = \left\|\bar{b}\right\|^2\|\bar{a}\|^2 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2$$

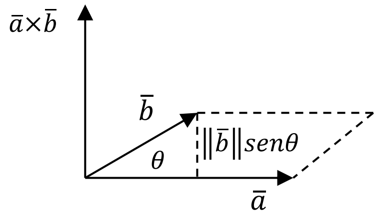
Ejercicio 5. Determinar una fórmula para calcular el área de un paralelogramo cuyos lados están representados por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.de $R^{3.}$

Solucion 5.

Recordamos que el área del paralelogramo es el producto de la base por la altura, por lo que en la figura se observa

$$A_{Paralelogramo} = \|\bar{a}\|\|b\|sen\theta$$

Recordamos



$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\left\|\bar{b}\right\|cos\theta\ , 0 \leq \theta \leq \pi$$

Y de la identidad de Lagrange

$$\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|^2 = \left\|\bar{b}\right\|^2\|\bar{a}\|^2 - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)^2$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|^2 &= \left\|\bar{b}\right\|^2\|\bar{a}\|^2 - \left(\|\bar{a}\|\left\|\bar{b}\right\|cos\theta\ \right)^2\\ &= \left\|\bar{b}\right\|^2\|\bar{a}\|^2 - \|\bar{a}\|^2\left\|\bar{b}\right\|^2cos^2\\ &= \left\|\bar{b}\right\|^2\|\bar{a}\|^2(1 - cos^2)\\ &= \left\|\bar{b}\right\|^2\|\bar{a}\|^2sen^2\theta\end{aligned}$$

Finalmente,

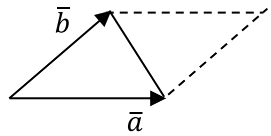
$$\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|^2 = \left\|\bar{b}\right\|^2\|\bar{a}\|^2sen^2\theta$$

Con lo cual se ha demostrado que el área del paralelogramo es la norma o longitud del vector $\bar{a}\times\bar{b}$.

Es decir

$$A_{Paralelogramo} = \left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|$$

Y el área del triángulo cuyos lados están representados por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ está dado por



$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|$$

NOTA. Dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de R^3 son paralelos si y sólo si $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{0}$

1.4 TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

El producto mixto o triple producto escalar de los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ de R^3, denotado por $\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$, se define como es número dado por:

$$\left[\bar{\boldsymbol{a}}\ \bar{\boldsymbol{b}}\ \bar{\boldsymbol{c}}\right] = \bar{\boldsymbol{a}}\cdot\left(\bar{\boldsymbol{b}}\times\bar{\boldsymbol{c}}\right)$$

NOTA. La expresión $(\bar{a} \cdot \bar{b})\times\bar{c}$ no tiene significado alguno

1.4.1 PROPIEDADES.

1. $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = [\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a}] = [\bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}]$
2. $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c}\times\bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a}\times\bar{b})$
3. $[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c}) = \|\bar{b}\times\bar{c}\| Comp_{\bar{b}\times\bar{c}}\bar{a}$

NOTAS.

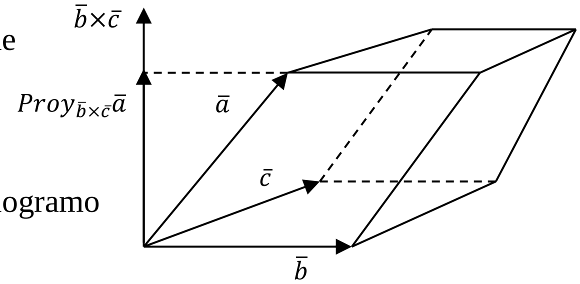
1. Tres vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ de R^3 son linealmente dependientes si y sólo si
$$[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b}\times \bar{c}) = 0$$
2. La dependencia lineal de tres vectores es equivalente a que los tres vectores sean paralelos a un mismo plano.

Ejercicio 6. Determinar una fórmula para calcular el volumen del paralelepípedo de arista lateral el vector $\bar{a}$ y cuya base tiene lados representados por los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$.

Solucion 6.

En la figura, el volumen del paralelepípedo es el producto del área de la base por la altura.

$$V = (\acute{a}rea\ de\ la\ base)(altura)$$



El área de la base, es el área del paralelogramo determinado por los vectores $\bar{b}$ y $\bar{c}$

$$\acute{a}rea\ de\ la\ base = \|\bar{b}\times\bar{c}\|$$

La altura del paralelepípedo es la norma, de la proyección ortogonal del vector $\bar{a}$ sobre el vector $\bar{b}\times\bar{c}$

$$altura = \|Proy_{\bar{b}\times\bar{c}}\bar{a}\|$$

Luego, el volumen del paralelepípedo está dado por

$$V = \|\bar{b}\times\bar{c}\| \|Proy_{\bar{b}\times\bar{c}}\bar{a}\|$$

$$V = \|\bar{b}\times\bar{c}\| \left\| \frac{\bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c})}{\|\bar{b}\times\bar{c}\|} \frac{\bar{b}\times\bar{c}}{\|\bar{b}\times\bar{c}\|} \right\|$$

$$V = \|\bar{b}\times\bar{c}\| \left| \frac{\bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c})}{\|\bar{b}\times\bar{c}\|} \right| \left\| \frac{\bar{b}\times\bar{c}}{\|\bar{b}\times\bar{c}\|} \right\|$$

$$V = \|\bar{b}\times\bar{c}\| \left| \frac{\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})}{\|\bar{b}\times\bar{c}\|} \right| \ , \quad \left\| \frac{\bar{b}\times\bar{c}}{\|\bar{b}\times\bar{c}\|} \right\| = 1$$

$$V = \|\bar{b}\times\bar{c}\| \frac{1}{\|\bar{b}\times\bar{c}\|} |\bar{a} \cdot (\bar{b}\times\bar{c})|$$

$$V = |\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})|$$

Finalmente, el volumen del paralelepípedo es

$$\boldsymbol{V} = |[\bar{\boldsymbol{a}}\, \bar{\boldsymbol{b}}\, \bar{\boldsymbol{c}}]|$$

1.4.2 TORQUE

Al aplicar una fuerza en una llave inglesa al final del brazo lo más lejos del perno causa el movimiento de atornillar en dirección perpendicular al plano determinado por el brazo de la llave y la dirección de tu fuerza (se asume que el plano existe). Para medir cuanto atornillamos, necesitamos la noción de **torque** (o fuerza de torsión) (COLLEY, 1998).

En particular, si el vector $\bar{F}$ representa a la fuerza aplicada a la llave inglesa, Se tiene

$$Cantidad\ de\ torque = \begin{pmatrix} longitud\ de\ la \\ llave\ inglesa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} componente\ de\ \bar{F}\ perpendicular \\ a\ la\ llave\ inglesa \end{pmatrix}$$

Sea $\bar{a}$ el vector que representa, desde el centro de la cabeza del perno hasta el final del brazo de la llave inglesa. Entonces

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| Comp_{\bar{a}^{\perp}} \bar{F}$$

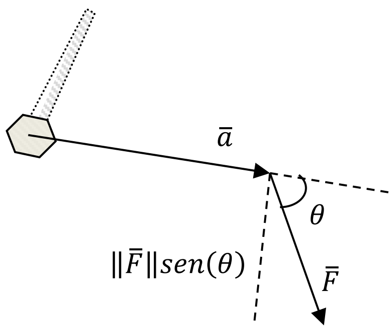


Figura 3: El torque sobre el perno es el vector $\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{F}}$

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| \frac{\bar{F} \cdot \bar{a}^{\perp}}{\|\bar{a}^{\perp}\|}$$

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| \frac{1}{\|\bar{a}^{\perp}\|} \|\bar{F}\| \|\bar{a}^{\perp}\| cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \ , \measuredangle(\bar{a}, \bar{F}) = \theta$$

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\| \|\bar{F}\| sen(\theta)$$

Recordamos que

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\| = \|\bar{b}\| \|\bar{a}\| sen\theta$$

Por lo que

$$\boldsymbol{Cantidad\ de\ torque} = \|\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{F}}\|$$

Se observa que la dirección de $\bar{a} \times \bar{F}$ es igual a la dirección en la que se esta atornillando el perno (se asume la regla de la mano derecha sobre el perno). Por consiguiente, es completamente natural definir el vector torque $\bar{\boldsymbol{T}}$ como:

$$\overline{\boldsymbol{T}} = \overline{\boldsymbol{a}} \times \overline{\boldsymbol{F}}$$

El vector torque $\overline{T}$ es la manera precisa de representar la situación física.

NOTA. Si $\overline{F}$ es paralelo al vector $\bar{a}$, entonces $\overline{T} = \bar{o}$. Lo cual indica que por más que presionemos la llave inglesa el perno no gira.

Ejercicio 7. Arturo está cambiando un neumático. La llave es posicionada en uno de los pernos de la rueda y hace un ángulo de 30° con la horizontal. Arturo ejerce una fuerza de 40 lb hacia abajo para aflojar el perno.

a) Si la longitud del brazo de la llave es un pie, ¿Qué cantidad de torque se imparte al perno?

b) Si se cambia la llave por una de 18 pulgadas de longitud, ¿Qué cantidad de torque se imparte al perno?

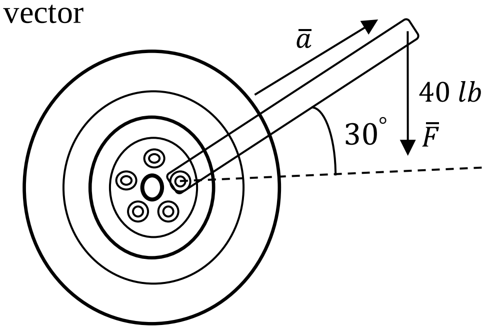
Solucion 7.

En la figura, el brazo de la llave es paralelo al vector

$$\bar{a} = (\|\bar{a}\|cos\theta, \|\bar{a}\|sen\theta, 0)$$

Y la fuerza está representada por el vector

$$\overline{F} = \|\overline{F}\|(0,1,0) = 40(0,1,0) = (0,40,0)$$



a) Se desea hallar la cantidad de torque que se imparte al perno.

$$\boldsymbol{Cantidad\ de\ torque} = \|\overline{\boldsymbol{a}} \times \overline{\boldsymbol{F}}\|$$

La longitud del brazo de la llave es $\|\bar{a}\| = 1\ pie$, entonces

$$\bar{a} = \left((1)cos\left(\frac{\pi}{6}\right), (1)sen\left(\frac{\pi}{6}\right), 0\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Luego

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a} \times \overline{F}\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \left\|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \times (0,40,0)\right\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \left\|\left(0,0, \frac{40\sqrt{3}}{2}\right)\right\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = 20\sqrt{3}\ pie - lb$$

b) La longitud del brazo de la llave es $\|\bar{a}\| = 18\ pulgadas$, entonces

$$\bar{a} = \left((18)cos\left(\frac{\pi}{6}\right), (18)sen\left(\frac{\pi}{6}\right), 0\right) = \left(9\sqrt{3}, 9, 0\right)$$

Luego

$$Cantidad\ de\ torque = \|\bar{a}\times\bar{F}\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \left\|\left(9\sqrt{3},9{,}0\right)\times(0{,}40{,}0)\right\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = \left\|\left(0{,}0{,}360\sqrt{3}\right)\right\|$$

$$Cantidad\ de\ torque = 360\sqrt{3}\,pulgadas - lb$$

$$Cantidad\ de\ torque = 30\sqrt{3}\,pies - lb$$

Ejercicio 8. Sean $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ vectores en R^3. Demostrar que:

$$\left[\bar{a}\ \bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\ \bar{c}\right] = -\|\bar{a}\|^2\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$$

Solucion 8. **Demostración.**

$\left[\bar{a}\ \bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\ \bar{c}\right] = \bar{a}\cdot\left(\left(\bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\right)\times\bar{c}\right)$ pues$\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right] = \bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$

$= \bar{a}\cdot\left(\left(\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{b}\right)\times\bar{c}\right)$ pues $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{c}$

$= \bar{a}\cdot\left(\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{a}\times\bar{c} - (\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{b}\times\bar{c}\right)$ pues $\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c}$

$= \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{c}) - (\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$ pues $\begin{cases}(r\bar{a})\times\bar{b} = r\left(\bar{a}\times\bar{b}\right) = \bar{a}\times\left(r\bar{b}\right)\\ \bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right) = \bar{a}\times\bar{b} + \bar{a}\times\bar{c}\end{cases}$

$= -(\bar{a}\cdot\bar{a})\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$ pues $\bar{a}\cdot(\bar{a}\times\bar{c}) = 0$

$= -\|\bar{a}\|^2\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$

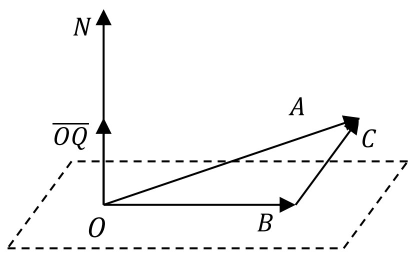
Por lo tanto,

$$\left[\bar{a}\ \bar{a}\times\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\ \bar{c}\right] = -\|\bar{a}\|^2\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$$

Ejercicio 9. Sean A, B y C vectores en R^3 tales que $A = B + C$, donde B pertenece al plano que pasa por el origen O y tiene normal N. Si $\overline{OQ}$ es el vector proyección de $\overline{OA}$ sobre N, demostrar que $\|\overline{OQ}\| \leq \|\overline{OC}\|$.

Solucion 9. **Demostración.**

En la figura



$$A = B + C$$

$$\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC}$$

$$\overline{OQ} = Proy_N\overline{OA} = \frac{\overline{OA}\cdot N}{\|N\|^2}N$$

$$\overline{OQ} = Proy_N(\overline{OB} + \overline{OC}) = Proy_N\overline{OB} + Proy_N\overline{OC}$$

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OB}\cdot N}{\|N\|^2}N + \frac{\overline{OC}\cdot N}{\|N\|^2}N$$

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OC}\cdot N}{\|N\|^2}N\,, \qquad \overline{OB}\perp N \ \leftrightsquigarrow\ \overline{OB}\cdot N = 0$$

Sacamos norma en ambos miembros se tiene;

$$\|\overline{OQ}\| = \left\|\frac{\overline{OC}\cdot N}{\|N\|^2}N\right\| = \left|\frac{\overline{OC}\cdot N}{\|N\|}\right|\left\|\frac{N}{\|N\|}\right\| = \left|\frac{\overline{OC}\cdot N}{\|N\|}\right| = \frac{1}{\|N\|}|\overline{OC}\cdot N|$$

$\|\overline{OQ}\| = \frac{1}{\|N\|}|\overline{OC}\cdot N| \leq \frac{1}{\|N\|}\|\overline{OC}\|\|N\|$, por la desigualdad de Schwarz

Finalmente,

$$\|\overline{OQ}\| \leq \|\overline{OC}\|$$

2. LA RECTA EN EL ESPACIO R³

DEFINICIÓN. La recta L es el conjunto de puntos de R^3 definido por:

$$L = \{P \in R^3 / P = P_0 + t\bar{a}\ ; t \in R\}$$

Dónde

P_0 ; es un punto de paso de la recta L

$\bar{a}$; es un vector direccional de la recta L

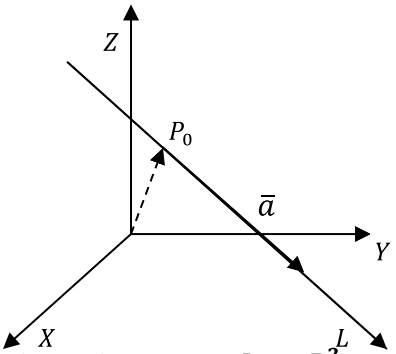


Figura 4: La recta $\boldsymbol{L}$ en $\boldsymbol{R^3}$ con punto de paso P_0 y vector direccional $\bar{a}$

2.1 DIVERSAS ECUACIONES DE LA RECTA

De la definición de la recta L se tiene

$$P \in L \iff P = P_0 + t\bar{a}, \qquad t \in R$$

Y la expresión

$$\boldsymbol{L}: \boldsymbol{P = P_0 + t\bar{a}, t \in R}$$

Es llamada **ecuación vectorial de la recta *L*.**

Sean $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ entonces la recta L resulta

$$L: (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3), t \in R$$

De donde

$$\boldsymbol{L}: \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + ta_1} \\ \boldsymbol{y = y_0 + ta_2} \\ \boldsymbol{z = z_0 + ta_3} \end{cases}, \qquad \boldsymbol{t \in R}$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica de la recta** L.

Despejando el parámetro t e igualando se obtiene

$$\boldsymbol{L}: \frac{\boldsymbol{x - x_0}}{\boldsymbol{a_1}} = \frac{\boldsymbol{y - y_0}}{\boldsymbol{a_2}} = \frac{\boldsymbol{z - z_0}}{\boldsymbol{a_3}}$$

Expresión llamada **ecuación simétrica de la recta L**.

Los números a_1, a_2, a_3 se llaman números directores de la recta L.

Además, sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

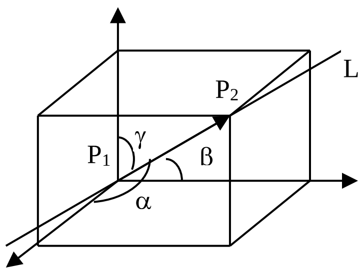


Figura 5. Números, ángulos y cosenos directores de la recta L

De la figura se tiene;

$$cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\|\overline{P_1P_2}\|}, \qquad cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\|\overline{P_1P_2}\|}, \qquad cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\|\overline{P_1P_2}\|}$$

Llamados los cosenos directores de la recta determinada por los puntos P_1 y P_2 ; α, β y γ son llamado los ángulos directores.

Ejercicio 10. Halle las ecuaciones vectorial, paramétrica y simétrica de la recta L que pasa por el punto $(1,1,1)$ y tiene sus tres ángulos directores iguales.

Solucion 10.

Se desea hallar ecuaciones de la recta de las formas

$$L: P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$$

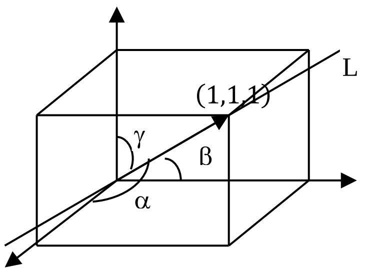
$$L: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, \qquad t \in R$$

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Consideremos el vector unitario

$$\boldsymbol{\bar{u} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)}$$

como vector direccional de la recta $\boldsymbol{L}$.



Se conoce que; $\alpha = \beta = \gamma$ y $\|\bar{u}\| = 1$

Luego,

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

De donde se obtiene

$$3cos^2\alpha = 1 \rightsquigarrow cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces

$$\bar{u} = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) // (1,1,1)$$

Luego;

$L: P = (1,1,1) + t(1,1,1), t \in R$, Ecuación vectorial de la recta.

$L: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in R,$ Ecuación paramétrica de la recta

$L: x - 1 = y - 1 = z - 1$, Ecuación simétrica de la recta

Además, la recta pasa por el origen de coordenadas, pues el origen pertenece a la recta L para $t = -1$

2.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean $L_1 : P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$ y $L_2 : P = Q_0 + s\bar{b}\,,\ s \in R$ dos rectas en R^3.

Se presentan las siguientes posiciones relativas:

2.2.1 RECTAS PARALELAS

Las rectas L_1 y L_2 son paralelas $(L_1\ //\ L_2)$ si y sólo si los vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son paralelos.

$$L_1 \,//\, L_2 \iff \bar{a}\ //\ \bar{b}$$

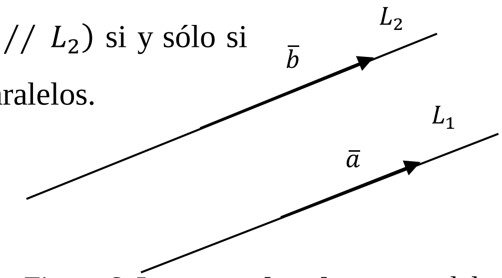


Figura 6. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas

2.2.2 RECTAS ORTOGONALES

Las rectas L_1 y L_2 son ortogonales$(L_1\ \perp\ L_2)$ si y sólo si los vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales.

$$L_1 \perp L_2 \iff \bar{a}\ \perp\ \bar{b}$$

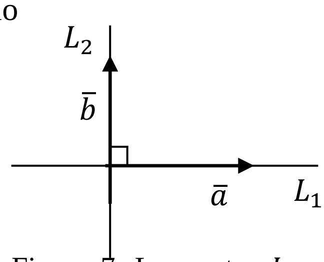


Figura 7. Las rectas L_1 y L_2 son ortogonales

2.2.3 RECTAS QUE SE INTERSECTAN

Las rectas L_1 y L_2 se interceptan si y sólo si $\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right] = 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0}$

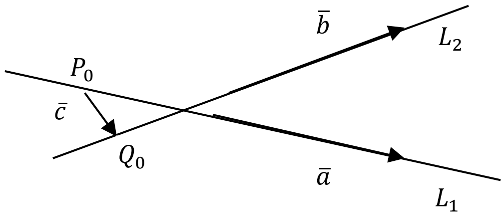


Figura 8. Las rectas L_1 y L_2 se intersectan

2.2.4 RECTAS QUE SE CRUZAN

Las rectas L_1 y L_2 se cruzan si y sólo si $\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right] \neq 0$ donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0}$

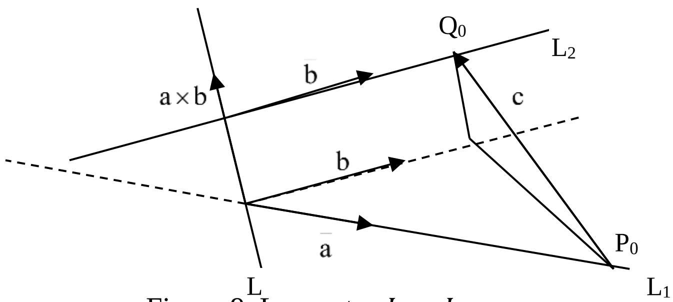


Figura 9. Las rectas L_1 y L_2 se cruzan

La recta L tiene como vector direccional al vector $\bar{a}\times\bar{b}$ y es ortogonal a las rectas L_1 y L_2.

Ejercicio 11. Dadas las rectas

$$L_1: P = (0,1,2) + t(1,1,1), t \in R$$

$$L_2: x = t, y = t, z = 0$$

Determinar si las rectas se interceptan o se cruzan. Si se interceptan hallar el punto de intersección, si se cruzan hallar la recta ortogonal a L_1 y a L_2.

Solucion 11.

De L_1 se tiene: $\bar{a} = (1,1,1), P_0(0,1,2)$

De L_2 se tiene: $\bar{b} = (1,1,0)$, $Q_0(0,0,0)$

Obteniéndose: $\bar{c} = \overline{P_0Q_0} = (0,-1,-2)$

Luego

L_1 y L_2 se interceptan si y sólo si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$

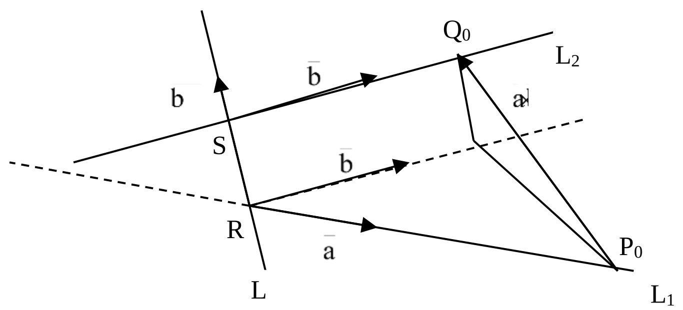
L_1 y L_2 se cruzan si y sólo si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$

Veamos,

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = (1,1,1)\cdot\big((1,1,0)\times(0,-1,-2)\big) = (1,1,1)\cdot(-2,2,-1) = -1 \neq 0$$

Por lo que L_1 y L_2 se cruzan.

Ahora, hallemos la recta L ortogonal a las rectas L_1 y L_2



En la figura

$$L: P = R + r\big(\bar{a}\times\bar{b}\big), r \in R$$

Donde

$$R = P_0 + t\bar{a}, t \in R \rightsquigarrow R = (0,1,2) + t(1,1,1), t \in R$$

$$S = Q_0 + s\bar{b}, s \in R \rightsquigarrow S = (0,0,0) + s(1,1,0)\ s \in R$$

Entonces

$$\overline{RS} = Proy_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q_0} = \frac{(0,-1,-2)\cdot(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) = -\frac{1}{2}(-1,1,0)$$

Luego

$$s(1,1,0)-(0,1,2)-t(1,1,1)=\frac{1}{2}(1,-1,0)$$

$$s(1,1,0)-t(1,1,1)=\frac{1}{2}(1,1,4)$$

$$\begin{cases} s-t=\frac{1}{2} \\ s-t=\frac{1}{2} \\ -t=2 \end{cases} \rightsquigarrow \ t=-2, \ s=-\frac{3}{2}$$

Obteniéndose los puntos

$$R=(0,1,2)+(-2)(1,1,1)=(-2,-1,0)$$

$$S=(0,0,0)+\left(-\frac{3}{2}\right)(1,1,0)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},0\right)$$

Finalmente, la recta L esta dada por;

$$L: P=(-2,-1,0)+r(1,1,1)\times(1,1,0), r\in R$$

$$\boldsymbol{L: P=(-2,-1,0)+r(-1,1,0), r\in R}$$

2.2.5 ANGULO ENTRE RECTAS

Sean

$$L_1: P=P_0+t\bar{a}\ , t\in R \text{ y } L_2: P=Q_0+s\bar{b}\ , s\in R$$

Dos rectas en R^3. Se define el ángulo entre las rectas como aquel ángulo que forman sus vectores direccionales.

Es decir,

$$\measuredangle(L_1,L_2)=\measuredangle(\bar{a},\bar{b})=\theta$$

Y queda completamente determinado por:

$$cos\theta=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\|\bar{b}\|}$$

NOTA. Si L_1 y L_2 se cruzan, el ángulo entre ellas se determina trazando una recta L, paralela a cualquiera de ellas y que pase por un punto cualquiera de la otra recta, luego el ángulo está formado por la recta L y la recta con la que tienen el punto común.

2.3 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea L: $P = P_0 + t\bar{a}, t \in R$ una recta y Q un punto en R^3, para determinar la distancia del punto Q a L se sigue;

En la figura, el área del paralelogramo está dado por

$A = \|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\| = \|\bar{a}\|\|\overline{P_0Q}\| sen\theta$

De donde

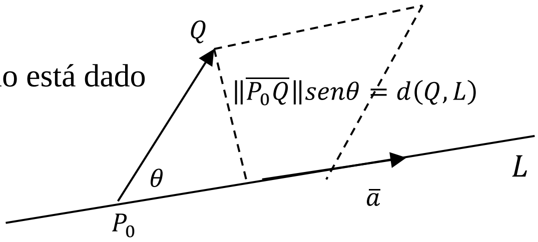


Figura 10. Distancia del punto Q a la recta L

$$\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\| = \|\bar{a}\| d(Q, L)$$

Finalmente;

$$\boldsymbol{d(Q, L) = \frac{\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}}$$

Ejercicio 12. Halle la distancia entre las rectas:

$$L_1: x - 1 = 7(z - 3), y = 6$$

$$L_2: P = (4,2,7) + t(-7,0,-1), t \in R$$

Solucion 12.

De L_1 se tiene que su vector direccional es $\bar{a} = (7,0,1)$ y su punto de paso es $P_0(1,6,3)$.

De L_2 se tiene que su vector direccional es $\bar{b} = (-7,0,-1)$ y su punto de paso es $Q(4,2,7)$

Como $\bar{a} \,//\, \bar{b}$ entonces $L_1 \,//\, L_2$.

Luego la distancia de L_1 a L_2 esta dado por la distancia del punto $Q(4,2,7)$ a L_1

Es decir;

$$d(Q, L_1) = \frac{\|\overline{P_0Q} \times \bar{a}\|}{\|\bar{a}\|}, \overline{P_0Q} = (3,-4,4)$$

$$d(Q, L_1) = \frac{\|(3,-4,4) \times (7,0,1)\|}{\|(7,0,1)\|} = \frac{\|(-4,25,28)\|}{5\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{57}}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{114}$$

2.4 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Sean $L_1: P = P_0 + t\bar{a}\,, t \in R$ y $L_2: P = Q_0 + s\bar{b}\,, s \in R$ dos rectas que se cruzan.

$$d(L_1, L_2) = \|\overline{PQ}\|$$

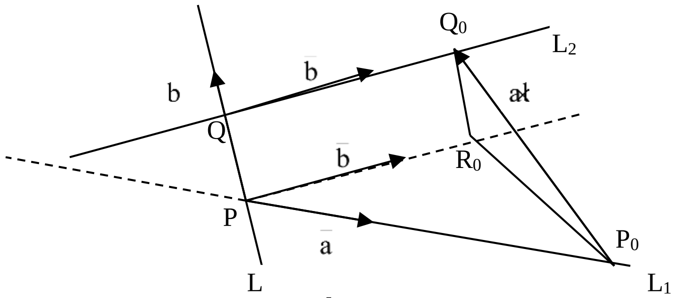


Figura 11. Distancia entre las rectas que se cruzan L_1 y L_2

En la figura, la distancia (mínima) de L_1 a L_2 es medida a lo largo de la recta L perpendicular a ellas.

Es decir,

$$\|\overline{PQ}\| = \|\overline{R_0Q_0}\| = |Comp_{\bar{a}\times\bar{b}}\overline{P_0Q_0}| = \left|\frac{\overline{P_0Q_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}\right| = \frac{\left|\left[\overline{P_0Q_0}\;\bar{a}\;\bar{b}\right]\right|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{d(L_1, L_2)} = \frac{\left|\left[\boldsymbol{\overline{P_0Q_0}\;\bar{a}\;\bar{b}}\right]\right|}{\|\boldsymbol{\bar{a}\times\bar{b}}\|}$$

Ejercicio 13. Sean las rectas

$$L_1: P = (0,1,2) + t(1,1,1), t \in R$$

$$L_2: x = t, y = t, z = 0$$

Determinar la distancia (mínima) de L_1 a L_2.

Solucion 13.

De la recta L_1 se tiene el vector direccional $\bar{a} = (1,1,1)$ y punto de paso $P_0(0,1,2)$

De la recta L_2 se tiene el vector direccional $\bar{b} = (1,1,0)$ y punto de paso $Q_0(0,0,0)$

De donde $\bar{c} = \overline{P_0Q_0} = (0,-1,-2)$ y $\bar{a}\times\bar{b} = (-1,1,0)$

Luego $\left[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}\right] = (0,-1,-2)\cdot\big((1,1,1)\times(1,1,0)\big) = -1$

Por lo que las recta L_1 y L_2 se cruzan

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left|\left[\overline{P_0Q_0}\;\bar{a}\;\bar{b}\right]\right|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|} = \frac{|(0,-1,-2)\cdot(-1,1,0)|}{\|(-1,1,0)\|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. EL PLANO EN EL ESPACIO R³

DEFINICIÓN. El Plano es un conjunto de puntos P en R^3 que tiene un punto de paso P_0 y dos vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$ no paralelos en R^3 tal que

$$\boldsymbol{P} = \left\{P \in R^3/P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r,s \in R\right\}$$

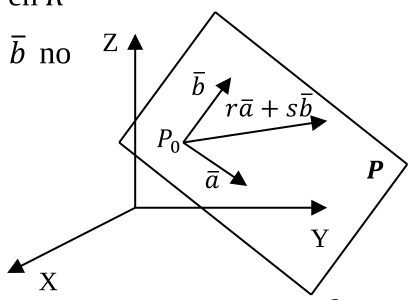


Figura 12: El Plano P en R^3con punto de paso P_0 y vectores generadores

3.1 DIVERSAS ECUACIONES DEL PLANO

De la definición del plano $\boldsymbol{P}$

$$P \in \boldsymbol{P} \iff P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r,s \in R$$

Luego, la expresión

$$\boldsymbol{P}: P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b};\ r,s \in R$$

Es llamada la **ecuación vectorial del plano P** que pasa por el punto P_0 y es generado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Sean $P(x,y,z)$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a} = (a_1,a_2,a_3)$ y $\bar{b} = (b_1,b_2,b_3)$, entonces la ecuación del plano resulta

$$P: (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + r(a_1,a_2,a_3) + s(b_1,b_2,b_3); r,s \in R$$

De donde

$$P: \begin{cases} x = x_0 + ra_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ra_2 + sb_2 \ ; r,s \in R \\ z = z_0 + ra_3 + sb_3 \end{cases}$$

Expresión llamada **ecuación paramétrica del plano** P.

3.1.1 VECTOR NORMAL AL PLANO

Cualquier vector no nulo $\bar{n}$ ortogonal al plano P, es ortogonal a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se llama **vector normal** al plano P.

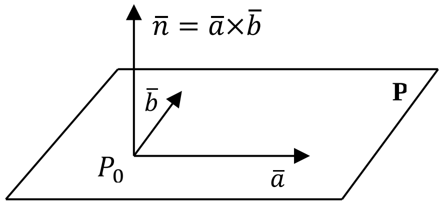


Figura 13: Vector normal $\boldsymbol{\bar{n}}$ al plano P

En particular un vector normal al plano P es

$$\boldsymbol{\bar{n}} = \boldsymbol{\bar{a}}\times\boldsymbol{\bar{b}}$$

Si P_0 es un punto fijo del plano $\boldsymbol{P}$ y P es un punto cualquiera de $\boldsymbol{P}$, entonces el vector $\overline{P_0P}$ es ortogonal al vector normal $\bar{n} = \bar{a}\times\bar{b}$

Luego la ecuación del plano está dada por

$$P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$$

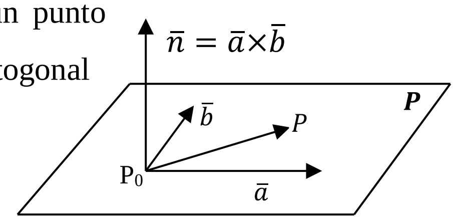


Figura 14: Ecuación normal del Plano P

Expresión llamada **ecuación normal del plano P** con punto de paso P_0 y vector normal $\bar{n}$.

Ahora si $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{n} = (a, b, c)$ se tiene que la ecuación del plano está dada por

$$P: (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$$

Operando se obtiene,

$$\boldsymbol{P: ax + by + cz + d = 0}$$

Donde: $\boldsymbol{d = -ax_0 - by_0 - cz_0}$

Expresión llamada **ecuación general del plano P** con vector normal $\bar{n} = (a, b, c)$ y punto de paso P_0.

Ejercicio 14. Halle la ecuación; vectorial, paramétrica y general del plano **P** que pasa por el punto $P_0(1,2,3)$ y es paralelo a las rectas

$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}, \qquad L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{-3}$$

Solucion 14.

De la recta L_1 se tiene el vector direccional $\bar{a} = (3, -1, 2)$

De la recta L_2 se tiene el vector direccional $\bar{b} = (2, 5, -3)$

De donde se aprecia que los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son no paralelos, por lo que:

La expresión

$$\boldsymbol{P}: P = (1,2,3) + r(3, -1, 2) + s(2, 5, -3); r, s \in R$$

Es la ecuación vectorial del plano **P**.

Si $P(x, y, z)$ se obtiene;

$$\boldsymbol{P}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 3r + 2s} \\ \boldsymbol{y = 2 - r + 5s} \\ \boldsymbol{z = 3 + 2r - 3s} \end{cases} ; \boldsymbol{r, s \in R}$$

Expresión llamada ecuación paramétrica del plano **P**.

De la ecuación normal del plano

$$\boldsymbol{P}: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$$

$\overline{P_0P} = (x - 1, y - 2, z - 3)$ y $\bar{n} = \bar{a}\times\bar{b} = (3, -1, 2)\times(2, 5, -3) = (-7, 13, 17)$

Luego se tiene

$$\boldsymbol{P}: (x-1, y-2, z-3)\cdot(-7,13,17) = 0$$

$$\boldsymbol{P}: \boldsymbol{7x - 13y - 17z + 70 = 0}$$

Expresión llamada la ecuación general del plano **P**.

3.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean los planos $P_1: (\overline{P_0P})\cdot\bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P})\cdot\bar{n}_2 = 0$ en R^3. Se presentan las siguientes posiciones relativas:

3.2.1 PLANOS PARALELOS

Los planos $P_1: (\overline{P_0P})\cdot\bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P})\cdot\bar{n}_2 = 0$ son paralelos si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son paralelos.

Es decir,

$$P_1 \,//\, P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \,//\, \bar{n}_2$$

Notas.

- Si P_1 y P_2 son paralelos entonces $P_1 = P_2$(coincidentes) o $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ (intersección nula)
- Si P_1 y P_2 no son paralelos entonces su intersección es una recta

3.2.2 PLANOS ORTOGONALES

Los planos $P_1: (\overline{P_0P})\cdot\bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P})\cdot\bar{n}_2 = 0$ son ortogonales si sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son ortogonales.

Es decir,

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$$

3.2.3 ANGULO ENTRE DOS PLANOS

El ángulo entre los planos $P_1: (\overline{P_0P})\cdot\bar{n}_1 = 0$ y $P_2: (\overline{Q_0P})\cdot\bar{n}_2 = 0$ se define como el ángulo formado entre sus vectores normales $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$.

Es decir,

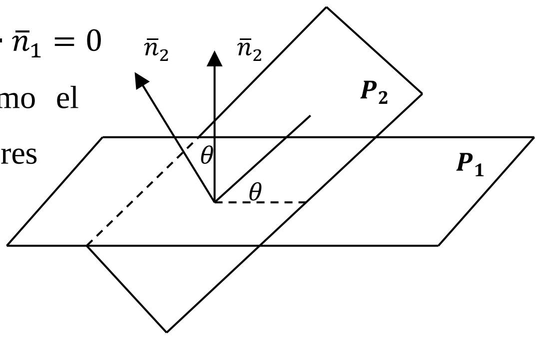


Figura 15: Angulo entre dos planos

$$\measuredangle(P_1, P_2) = \measuredangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) \;\rightsquigarrow\; cos\theta = \frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{\|\bar{n}_1\|\|\bar{n}_2\|}$$

3.3 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$, $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ y el punto Q de R^3. Para hallar la distancia del punto Q al plano P se sigue;

En la figura

$$d(Q,P) = \|Proy_{\bar{a}\times\bar{b}} \overline{P_0Q}\|$$

$$d(Q,P) = \left\| \frac{\overline{P_0Q} \cdot (\bar{a}\times\bar{b})}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|^2} \right\|$$

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q} \cdot (\bar{a}\times\bar{b})|}{\|\bar{a}\times\bar{b}\|}$$

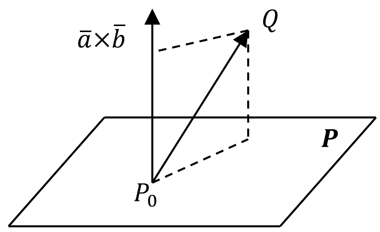


Figura 16: Distancia del punto Q al plano P

$$d(Q,P) = \frac{|\overline{P_0Q} \cdot \bar{n}|}{\|\bar{n}\|}$$

Si $Q(x_1, y_1, z_1)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{n} = (a, b, c)$ y $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, entonces

$$d(Q,P) = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boldsymbol{d(Q,P) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

3.4 POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ en R^3. Se presenta las siguientes posiciones relativas:

3.4.1 RECTA PARALELA A UN PLANO

La recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ es paralela al plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ si y sólo su vector direccional $\bar{a}$ y su vector normal $\bar{n}$, respectivamente, son ortogonales. Es decir;

$$L \parallel P \Leftrightarrow \bar{n} \perp \bar{a} \Leftrightarrow \bar{n} \cdot \bar{a} = 0$$

y puede suceder que $L \cap P = L$ ó $L \cap P = \phi$

3.4.2 RECTA ORTOGONAL A UN PLANO

La recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ es ortogonal al plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ si y sólo su vector direccional $\bar{a}$ y su vector normal $\bar{n}$, respectivamente, son paralelos. Es decir;

$$L \perp P \Leftrightarrow \bar{n} \parallel \bar{a}$$

En general, la recta L que no es paralela al plano P se interceptan en un punto.

3.5 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO NO PARALELOS

Sea la recta $L: P = Q_0 + t\bar{a}, t \in R$ y el plano $P: (\overline{P_0P}) \cdot \bar{n} = 0$ no paralelos.

Se desea hallar el punto de intersección $L \cap P = R$

Para ello se sigue;

En la figura

$$\overline{Q_0P_0} + \overline{P_0R} = \overline{Q_0R}$$

y

$$\overline{Q_0R} = t\bar{a}\,, t \in R$$

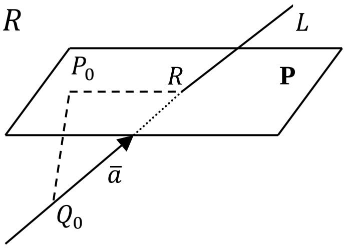


Figura 17: Intersección de la recta L y el plano P

Aplicando multiplicación escalar en ambos miembros de la ecuación anterior por el vector $\bar{n}$ resulta

$$\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} + \overline{P_0R} \cdot \bar{n} = \overline{Q_0R} \cdot \bar{n}$$

Pero $\bar{n} \perp \overline{P_0R}$, es decir $\bar{n} \cdot \overline{P_0R} = 0$,

Entonces

$$\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} = \overline{Q_0R} \cdot \bar{n} \rightsquigarrow \ \overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n} = t\bar{a} \cdot \bar{n} \rightsquigarrow \ t = \frac{\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n}}{\bar{a} \cdot \bar{n}}$$

Luego la ecuación anterior resulta

$$\overline{Q_0R} = \left(\frac{\overline{Q_0P_0} \cdot \bar{n}}{\bar{a} \cdot \bar{n}} \right) \bar{a}$$

Finalmente

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q_o} + \left[\frac{(\boldsymbol{P_0} - \boldsymbol{Q_0}) \cdot \bar{\boldsymbol{n}}}{\bar{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}}} \right] \bar{\boldsymbol{a}}$$

Es el punto de intersección de la recta L y el plano P.

3.6 DISTANCIA ENTRE PLANOS PARALELOS

Sean los planos paralelos dados en su forma general por:

$$\wp_1: Ax + By + Cz = D_1$$

$$\wp_2: Ax + By + Cz = D_2$$

Para hallar la distancia entre estos planos se sigue;

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \wp_1$ y $P_2(x_2, y_2, z_2) \in \wp_2$

$$d(\wp_1, \wp_2) = |Comp_{\bar{n}} \overline{P_1P_2}|$$

$$d(\wp_1, \wp_2) = \left| \frac{\overline{P_1P_2} \cdot \bar{n}}{\|\bar{n}\|} \right|$$

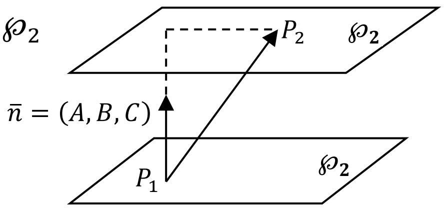


Figura 18: Distancia entre dos planos paralelos

$$d(\wp_1,\wp_2) = \left|\frac{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (A; B; C)}{\|(A, B, C)\|}\right|$$

$$d(\wp_1,\wp_2) = \left|\frac{Ax_2 + By_2 + Cz_2 - Ax_1 - By_1 - Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

Finalmente,

$$d(\wp_1,\wp_2) = \left|\frac{D_2 - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

Ejercicio 15. Halle la ecuación del plano P que contiene a la recta

$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Y es perpendicular al plano $P_1: 2x + y - 2z + 1 = 0$.

Solucion 15.

Se desea hallar la ecuación del plano P generado por el vector direccional de la recta L y por el vector normal del plano P_1, sino no son paralelos, y con punto de paso alguno punto de la recta L.

La recta L es intersección de dos planos con vectores normales

$$L: \begin{cases} 2x - y - 4z + 7 = 0 \ \rightsquigarrow \ \bar{n}_1 = (2, -1, -4) \\ 3x + 2y + z = 0 \ \rightsquigarrow \ \bar{n}_2 = (3,2,1) \end{cases}$$

Tales que $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, por lo que los planos son ortogonales.

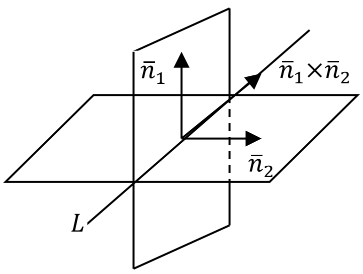
En la figura, la recta L tiene como vector direccional al vector

$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (7, -14,7)$, por lo que

$$L: P = P_0 + t(1, -2,1)\ , t \in R$$

Donde $P_0(x_0, y_0, z_0) \in L$

Sea $x_0 = 0$, entonces



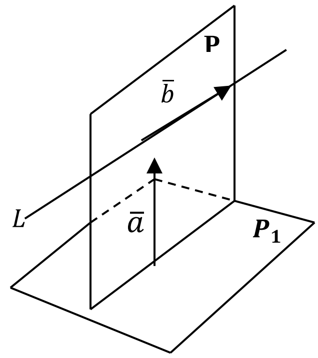
$$P_0(0, y_0, z_0) \in L: \begin{cases} y_0 - 4z_0 + 7 = 0 \\ 2y_0 + z_0 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene $y_0 = -1$, $z_0 = 2$

Luego el punto de paso es $P_0(0, -1,2)$ y la recta es;

$$L: P = (0, -1,2) + t(1, -2,1)\ , t \in R$$

Ahora el plano P es generado por el vector $\bar{a} = (2,1,-2)$ normal a P_1 y el vector $\bar{b} = (1,-2,1)$ vector direccional de L.



Es decir

$$P: P = (0,-1,2) + r\bar{a} + s\bar{b}; r,s \in R$$

$$P: P = (0,-1,2) + r(2,1,-2) + s(1,-2,1); r,s \in R$$

De

$$P: \overline{P_0P} \cdot \left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = 0$$

Se obtiene la ecuación general del plano P

$$P: (x, y+1, z-2) \cdot \left((2,1,-2) \times (1,-2,1)\right) = 0$$

$$P: (x, y+1, z-2) \cdot (-3,-4,-3) = 0$$

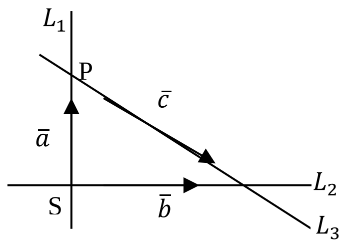
$$\boldsymbol{P: 3x + 4y + 3z - 2 = 0}$$

Ejercicio 16. Las rectas L_1 y L_2 tienen vectores direccionales $\bar{a} = (4,0,3)$ y $\bar{b} = \left(-3, \sqrt{11}, 4\right)$ respectivamente. Su intersección es el punto $S(3,2,1)$. Cual es la recta L_3 que pasa por el punto $P(15,2,10)$ y determina con L_1 y L_2 un triángulo de $6u^2$ de área.

Solucion 16.

Haciendo un esbozo de las rectas se tiene

En la figura se tiene



$$\bar{a} \,//\, \overline{SP} = (12,0,9) = 3(4,0,3)$$

Se verifica que

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (4,0,3) \cdot \left(-3, \sqrt{11}, 4\right) = 0$$

Por lo que las rectas L_1 y L_2 son ortogonales. Y el área del triángulo es;

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2}\left\|\left(t\bar{b}\right) \times \overline{SP}\right\| = 12$$

$$\left\|t\left(-3, \sqrt{11}, 4\right) \times (12,0,9)\right\| = 24$$

$$\left\|t\left(9\sqrt{11}, 75, -12\sqrt{11}\right)\right\| = 24$$

$$|t|\sqrt{\left(9\sqrt{11}\right)^2 + (75)^2 + \left(-12\sqrt{11}\right)^2} = 24$$

$$90|t| = 24 \quad \rightsquigarrow \quad t = \pm\frac{4}{15}$$

Luego el vector base del triángulo es: $t\bar{b} = \frac{4}{15}\left(-3, \sqrt{11}, 4\right)$

Sea $\bar{c}$ el vector direccional de la recta $L_3: P = (15,20,10) + r\bar{c}\,, r \in R$ tal que

$$\bar{c} = t\bar{b} - \overline{SP}$$

$$\bar{c} = \frac{4}{15}\left(-3, \sqrt{11}, 4\right) - (12,0,9)$$

$$\bar{c} = \left(-\frac{64}{5}, \frac{4}{15}\sqrt{11}, -\frac{119}{15}\right)$$

Finalmente, la recta pedida es;

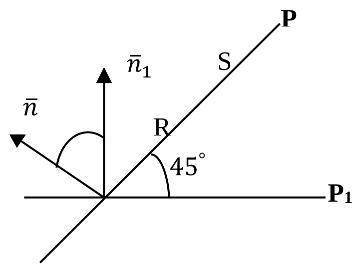
$$\boldsymbol{L_3: P = (15, 2, 10) + r\left(-192, 4\sqrt{11}, -119\right), r \in R}$$

Ejercicio 17. Sean los puntos $R(2,3,4)$ y $S(3,1,6)$ y el plano $P_1: x + y - 4z = 3$. Hallar la ecuación de un plano P que pasa por R, S y que forma con P_1 un ángulo de 45°.

Solucion 17.

Se desea hallar el plano

$$P: P = R + t\bar{a} + s\bar{b}\ ; t, s \in R$$



O también

$$P: P = S + t\bar{a} + s\bar{b}\ ; t, s \in R$$

Donde

$$\bar{a} = \overline{RS} = (1, -2, 2)$$

Cuyo vector normal es

$$\bar{n} = (1, -2, 2) \times (b_1, b_2, b_3) = (-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1)$$

Además, el ángulo entre los planos P y P_1 es el ángulo formado por sus vectores normales.

Es decir

$$\measuredangle(P, P_1) = \measuredangle(\bar{n}, \bar{n}_1) = 45^{\circ}, \qquad \bar{n}_1 = (1,1,-4)$$

Entonces

$$cos(45) = \frac{\bar{n} \cdot \bar{n}_1}{\|\bar{n}\|\|\bar{n}_1\|} \backsim \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1).(1,1,-4)}{\|\bar{n}\|\|(1,1,-4)\|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2b_3 - 2b_2 + 2b_1 - b_3 - 4b_2 - 8b_1}{3\sqrt{2}\|\bar{n}\|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-3b_3 - 6b_2 - 6b_1}{3\sqrt{2}\|\bar{n}\|}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-b_3 - 2b_2 - 2b_1}{\sqrt{2}\|\bar{n}\|}$$

Luego

$$\|\bar{n}\|^2 = (-b_3 - 2b_2 - 2b_1)^2$$

Es decir,

$$\|(-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1)\|^2 = (-b_3 - 2b_2 - 2b_1)^2$$

Desarrollando se tiene

$$4b_3^2 + b_2^2 + 4b_1^2 + 4b_2b_3 - 8b_1b_3 - 4b_1b_2 = 0$$

$$(2b_3 - 2b_1 + b_2)^2 = 0 \rightsquigarrow 2b_3 - 2b_1 = -b_2$$

Entonces el vector normal

$$\bar{n} = (-2b_3 - 2b_2, 2b_1 - b_3, b_2 + 2b_1) = (2b_3 - 4b_1, 2b_1 - b_3, 4b_1 - 2b_3)$$

$\bar{n} = (2b_1 - b_3)(-2,1,2)$

Luego basta considerar como vector normal

$$\bar{n} = (-2,1,2)$$

De la ecuación normal del plano

$$P: (P - R) \cdot \bar{n} = 0\,, \qquad R(2,3,4)$$

$$P: \big((x,y,z) - (2,3,4)\big) \cdot (-2,1,2) = 0$$

$$P: (x-2, y-3, z-4) \cdot (-2,1,2) = 0$$

$$P: 2x - y - 2z + 7 = 0$$

Ejercicio 18. Justificando debidamente su proceso, demostrar:

Si $X = A \times B, Y = B \times C, Z = C \times A$, entonces

$$[XY\ Y\times Z\ Z\times X] = [A\ B\ C]^4$$

Ejercicio 19. Demostrar la identidad de Jacobi:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} + (\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{a} + (\bar{c}\times\bar{a})\times\bar{b} = 0$$

Ejercicio 20. Sean A, B y C vectores en R^3 talque

$$\measuredangle(A,B) = \frac{\pi}{4} \text{ y } \|C\| = \|B\| = 1 = \frac{1}{2}\|A\|$$

Demostrar que:

$$[A\ B\times(B\times C\ )\ A\times(A\times C)] = -2\sqrt{2}[A\ B\ C]$$

Ejercicio 21. Sean los puntos $A(1,2,3), B(1,3,0), C(1+\sqrt{5},4,2)$ y $D(1+\sqrt{5},1,1)$. Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las diagonales de dos caras opuestas de un cubo. Hallar sus vértices.

Ejercicio 22. Hallar el ángulo que forman los vectores $\overline{AF}$ y $\overline{AC}$ si $\overline{PF} = \mathrm{Proy}_{\overline{AF}}\overline{CF} = (3,-6,3)$, $\overline{CP} = (-1,3,7)$. Donde $A(4,0,-1)$ y $F(a,b,0)$ son vértices de un paralelepípedo ABCDEFGH.

Ejercicio 23. Sean A, B y C vectores en R^3. Si, $X = A\times B$, $Y = B \times C$, $Z = C \times A$ Y $[A\ B\ C] = \sqrt{2}$ hallar: $[X\times Y\ Y\times Z\ Z\times X]$

Ejercicio 24. Los puntos A y H, B y E, C y F, D y G son respectivamente vértices opuestos de las caras ABCD y HEFG (opuestas) de un paralelepípedo. Halle su volumen si se sabe que $A(4,0,-1)$, $F(f_1, f_2, 0)$, $\overline{CP}=(-1,3,7)$, $\overline{BD}=(13,-1,-21)$ y $\overline{PF}=\mathrm{Proy}_{\overline{AF}}\overline{CF}=(3,-6,3)$

Ejercicio 25. Un objeto de 2 kg se desliza por una rampa que tiene un ángulo de 30° con la horizontal. Se desprecia la fricción, la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravitacional. ¿Cuál es la componente de la fuerza gravitacional en la dirección del movimiento del objeto?

Ejercicio 26. En un paralelepípedo rectangular, ABCD y EFGH son caras opuestas y AH, BG, CF y DE son aristas. Sean los vértices $A(13,8,5)$, $B(5,8,13)$ y $F(-5,-20,3)$. Si $\overline{FH}$ es paralelo al vector $\bar{v}=(6,3,2)$. Hallar el vértice H y el volumen del paralelepípedo.

Ejercicio 27. Sea la recta

$$L:\begin{cases} 3x+y-z+1=0 \\ 2x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

y el plano $P: 3x+2y-z-2=0$

a) Determinar si L y P son paralelos o se interceptan

b) Si son paralelos halle la distancia de L a P

c) Si se interceptan halle el punto de intersección.

Ejercicio 28.

a) Sea F una fuerza aplicada en uno de los extremos de un brazo que tiene fijo el otro. Determine una formula vectorial para:

$$\text{cantidad de torque} = (\text{longitud del brazo})(\text{componente de } F \perp \text{al brazo})$$

a) Melisa está cambiando un neumático. La llave es posicionada en uno de los pernos de la rueda formando un ángulo de 53° con la horizontal y aplica una fuerza de 40 lb. hacia abajo para aflojar el perno. Si la longitud de la llave es un pie, cual es el torque que imparte al perno.

Ejercicio 29. Dadas las rectas:

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x=y-1=z-2 \\ L_2 &: \quad x=t, \quad y=t, \quad z=0 \end{aligned}$$

Determinar si se intersecan o se cruzan. Si se intersecan hallar el punto de intersección, de lo contrario la distancia de L_1 a L_2 y la recta L perpendicular a ambas.

Ejercicio 30. Los puntos $A(1,1,1)$, $B(5,7,9)$, $C(6,7,8)$ y $D(7,5,9)$ determinan un tetraedro. Si desde A y D parten simultáneamente dos móviles con dirección al baricentro de la cara ABC, cada uno con una velocidad de $\sqrt{2}$ u/seg. En que punto se encuentra el móvil que partió de D, cuando el que partió de A llega al baricentro.

Ejercicio 31. Sea la recta

$$L: \quad \begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

y el plano $P: \quad 3x + 2y - z - 2 = 0$

Determine si L y P son paralelos o se interceptan. Si son paralelos halle la distancia de L a P, Si se interceptan halle el punto de intersección.

Ejercicio 32. Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ dos vectores de R^3 con longitudes $\|\bar{a}\| = 2$, $\|\bar{b}\| = 3$ y que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes. Hallar

a) $\mathrm{Proy}_{\bar{a}}(2\bar{a} - \bar{b})$

b) El área del paralelogramo formado por los vectores $2\bar{a} - \bar{b}$ y $\bar{a} + 2\bar{b}$

Ejercicio 33. La longitud de las aristas laterales de un paralelepípedo P es $4\sqrt{\frac{3}{2}}$ la longitud de las aristas de las bases. Hallar el mínimo volumen de P si $L_1 : (0,1,2) + r(1,1,1);\ r \in R$ contiene una arista lateral y $L_2 : \{x = t\,,\ y = t\,,\ z = 0\};\ t \in R$ contiene una arista en la base.

Ejercicio 34. Hallar la ecuación del plano P que contiene a la recta

$$L: \quad \begin{cases} -2x + y + 4z - 7 = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $P_1: \quad 2x + y - 2z + 1 = 0$

Ejercicio 35. Los puntos $A(6, -6, 8), B, C$ y D son vértices de un paralelogramo siendo $\overline{AB} = (1,7,3)$ una de las diagonales. Si $\mathrm{Proy}_{3\overline{CA}}\overline{AB} = \overline{AC}$, encuentre el área del paralelogramo que se construye con auxilio del punto Q de modo que $\overline{AQ} = (1, 4, 4)$ sea una de sus aristas, $\overline{AD}$ una de sus diagonales y $\mathrm{Proy}_{\frac{45}{7}\overline{BC}}\overline{BQ} = -\frac{7}{45}(2,4,5)$

Ejercicio 36. Hallar las rectas que pasan por el punto (3,4,0) y cortan al eje Z, sabiendo que la distancia del origen de coordenadas a dichas rectas es 4 unidades.

4. REFERENCIALES

1. **COLLEY, SUSAN JANE. 1998.** *Vector Calculus.* Upper Saddle River, New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 1998. 0-13-149204-7.
2. **KOLMAN, BERNARD. 1999.** *Algebra Lineal con Aplicaciones y Matlab.* Sexta Edición. México : PRENTICE HALL, 1999. pág. 704. 970-17-0265-4.
3. **STEWART, JAMES, REDLIN, LOTHER y WATSON, SALEEM. 2007.** *Precálculo Matemáticas para el Cálculo.* Quinta Edición. México : International Thomson Editores, S. A., 2007.